**Inspection d'académie de Tambacounda** — **Année académique :2021/2022**

**Cellule régionale de Mathématiques** — **Classe : TS2**

# NOMBRES COMPLEXES

## ✓<u>Partie</u> 1: Généralités

### Exercice 1 :

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte. Choisir la bonne réponse

1. Soit z un nombre complexe non nul dont un argument est $\frac{\pi}{6}$. Alors un argument de $i\bar{z}$ est :

   a) $\frac{-\pi}{6}$ ;   b) $\frac{\pi}{6}$   c) $\frac{\pi}{3}$

2. Soit z un nombre complexe de module 2 alors le conjugué $\bar{z}$ de z est :

   a) $\frac{\sqrt{2}}{z}$   b) $\frac{2}{z}$   c) $\frac{4}{z}$

**3**. Un argument du nombre complexe $(1+i)^{2019}$ est:

**a)** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$   ***b***) $-\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$   **c)** $\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$

**4.** L'écriture trigonométrique du nombre complexe : $z = -3\left[cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]$ est :

a) $z = -3\left[cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]$ ; b) $z = -3\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\,sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ ; $c)$ $z = 3\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

### Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants donner le module et un argument de z. Puis donner sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle. $\alpha \in [0;\pi]$

a) $z = -\sqrt{3} + i$ ;  b) $z = 1 - i$ ;  c) $z = 2(-\sqrt{3} + i)$ ;  d) $z = \frac{-\sqrt{3}+i}{(1-i)^8}$

e) $z = (-\sqrt{3} + \mathrm{i})(1-i)^3$ ;  f) $z = -sin\alpha + 1cos\alpha$

g) $z = 1 + cos\alpha + isin\alpha$ ;  h) $z = \frac{1-cos\,\alpha\, -isin\,\alpha}{1+cos\,\alpha\, -isin\,\alpha}$

### Exercice 3 :

On considère les complexes : $\mathrm{z}_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$ ,  $\mathrm{z}_2 = 2 + 2\mathrm{i}$  et  $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{z}_1}{\mathrm{z}_2}$ .

1) Ecrire Z sous forme algébrique.
2) Calculer le module et un argument de chacun des complexes $\mathrm{z}_1$ et $\mathrm{z}_2$.
3) En déduire :
   a) $|\mathrm{Z}|$ et $\arg(\mathrm{Z})$.
   b) Les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4) Montrer que $\mathrm{Z}^{12}$ est réel et que $\mathrm{Z}^{6}$ est imaginaire pur.
5) Ecrire $\mathrm{Z}^{2017}$ sous forme algébrique.

### Exercice 4 :

Soit le complexe : $\mathrm{Z} = (1+\mathrm{i})^{2015} + (1-\mathrm{i})^{2015}$.

1) Montrer que Z est réel sans le calculer.
2) On considère les complexes $\mathrm{z}_1 = (1+\mathrm{i})^{2015}$ et $\mathrm{z}_2 = (1-\mathrm{i})^{2015}$.
   a) Donner les écritures exponentielles de $\mathrm{z}_1$ et $\mathrm{z}_2$ .
   b) En déduire la valeur de Z.

# NOMBRES COMPLEXES

**Exercice 5 :**

On considère les complexes : $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Donner les formes trigonométriques de $z_1$ et $z_2$.
2) Soit le complexe $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
   a) Donner l'écriture algébrique et l'écriture trigonométrique de $Z$.
   b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
3) Déterminer le plus petit entier naturel $n_0$ tel que : $Z^{n_0}$ soit réel.

**Exercice 6 :**

On considère le complexe : $z = \left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(-1+\sqrt{3}\right)$.

1) Calculer $z^2$.
2) a) Donner la forme trigonométrique de $z^2$.

   b) En déduire le module et un argument des complexes : $z$ ; $\overline{z}$ et $\frac{i}{z}$.
3) Déterminer l'écriture algébrique de $z^6$.

**Exercice 7 :**

Soit z un nombre complexe différent de $-3i$. On considère le nombre complexe Z défini par :

$Z = \frac{2iz-1}{3-iz}$ . Soit A le point d'affixe $-3i$

Déterminer analytiquement puis géométrique l'ensemble des points M(z) tels que :

a) $|Z| = 2$ ; b) $|Z| = 4$.

**Exercice 8 :**

Soit z un nombre complexe différent de 1. On considère le nombre complexe Z défini par :

$Z = \frac{z+1}{z-1}$. Soient $A(1)$ ; $B(-1)$; $M(z)$ et $M'(Z)$.

1. Interpréter géométrique un argument de Z.
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M(z) tel que :
   a) Z est réel ; b) Z est imaginaire pur.

✓**Partie 2 :** **Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$**

**Exercice 1 :**

On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^4 = -7 - 24i$

1. Vérifier que : $2 - i$ est solution de (E)
2. Résoudre (E).

# NOMBRES COMPLEXES

**Exercice 2 :**

On considère la fonction polynôme P à variable complexe définie par :

$$P(z) = z^3 - (6+6i)z^2 + 21iz + 15 - 5i$$

1) Calculer $P(i)$ .
2) En déduire que $P(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$, avec a, b et c des complexes que l'on déterminera.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (6+5i)z + 5 + 15i = 0$ ; en déduire la résolution de l'équation : $P(z) = 0$
4) Soient A, B et C des points du plan d'affixes respectives : $\propto = i$ , $\beta = 3 + i$ *et* $\gamma = 3 - i$
   a) Placer les points A, B et C dans un repère complexe $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.

   Donner le module et un argument du nombre complexe $\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$.

5°) On considère l'équation suivante (E) : $z^3 = 18 + 26i$.

   a) Montrer que $\beta$ est solution de (E).
   b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

**Exercice 3 :**

1. Montrer que : $(-1+i)^3 = 2 + 2i$
2. .a Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^3 = 1$.
   (On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique).
   b. Déduire des questions précédentes les solutions dans de l'équation (E) : $z^3 = 2 + 2i$.
   On remarquera que (E) est équivalente à : $\left(\frac{z}{-1+i}\right)^3 = 1$

3.a. Ecrire $-1 + i$ sous forme trigonométrique.

b. En déduire les arguments des solutions de (E).

3. En déduire des questions 2b) et 3a) les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ .

**Exercice 4 :**

On considère le polynôme complexe défini par : $P(z) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$

1. Montrer que P admet deux racines imaginaires $z_1$ et $z_2$ que l'on déterminera.
2. Déterminer le polynôme Q tel que ; $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$.
3. En déduire les autres racines de P(z).
4. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{u}, \vec{v}$) (unite 1cm)
   On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = -i$ , $z_B = i$ , $z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i$ et $z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$.
   a. Placer les points A, B, C et D.
   b. Montrer que : $\frac{Z_C - Z_A}{Z_D - Z_A} \in iIR$ et que : $\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_B} \in iIR$
   c. En déduire la nature exacte des triangles ACD et CBD.
   d. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un cercle dont on précisera son centre et son rayon.

# NOMBRES COMPLEXES

✓**<u>Partie 3 :</u> Complexe et Transformations planes**

**<u>Exercice 1 :</u>**

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe $f$ vérifiant :

a. $f$ a pour rapport $k = 2$ angle $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ et transforme A en B avec $z_A = \sqrt{2}$ et $z_B = 4 + i\sqrt{2}$ .

b. $f$ a pour centre le point $I(1 + i)$ de rapport $k = 3$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe vérifiant : $f(A) = B \; et \; f(C) = D$

a. $z_A = i$ , $z_B = -4 - i,$ $z_C = 1 - i$ $et$ $z_D = -1 - 2i$

b. $z_A = 3 - 2i$ , $z_B =, -3 - 2i$ , $z_C = -3i$ $et$ $z_D = 3$

**<u>Exercice 2 :</u>**

Soit la transformation plane f d'écriture complexe :+

$z^{'} = \alpha^2 z + 1 + \alpha$ ; avec $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Déterminer les complexes $\alpha$ dans les cas ci-dessous

a) f est une translation.
b) f est une rotation d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$.
c) f est l'homothétie de rapport $k = -2$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f dans chacun des cas suivants :

a) $\alpha = 1 - i$ ; b) $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; c) $\alpha = -1$ ; d) $\alpha = -i\sqrt{3}$

**<u>Exercice 3 :</u>**

A) Pour tout nombre complexe on note : $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$

1. Déterminer le polynôme Q tel que pour tout complexe z on a : $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$ ,
2. Résoudre dans C l'équation (E) : $f(z) = 0$.
3. Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique puis représenter leur images dans le un repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).

B) Considérons les points A, B, C et D du plan P tel que :

A$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ ; $B\,(-1 + i)$ ; $C(-1 - i)$ $et$ $D\,(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})$

1. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
2. Soit r la rotation de centre $F(1)$ qui transforme A en D.
   Déterminer l'écriture complexe de r.
3. Quelle est la nature du triangle FAD ?
4. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle FAD.
5. On pose : $u_n = (z_A)^n$ , avec $n$ un entier naturel non nul et $z_A$ est l' affixe du point A.
   Déterminer la valeur minimale de n pour que $u_n$ soit réel.
6. Donner la forme algébrique de $u_{2019}$ .

# NOMBRES COMPLEXES

**Exercice 4 :**

1) On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

a) Donner une écriture trigonométrique de $z_0$.

b) Montrer que : ${z_o}^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 1$.

d) En déduire les solutions de l'équation (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, unité graphique 2 cm, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives : $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ , $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ , $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$ .

a) Placer ces points.

b) Donner une écriture complexe de la rotation $R$ de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) Vérifier que : $R(A) = C$, $R(C) = B$ et $R(B) = D$.

d) En déduire que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3) Soit $(S)$ la transformation complexe définie par : $z' = (1 - i)z + 2i$

a) Donner la nature et précises les éléments caractéristiques de $(S)$.

b) En déduire l'écriture complexe de $S \circ S^{-1}$.

**Exercice 5 :**

1) Calculer $Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : (E): $z^2 - i = 0$ .

2) On considère le polynôme $P(z) = z^3 + z^2 - iz - i$ où $z \in \mathbb{C}$ .

a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle $z_0$ que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ ; on note $z_1$ et $z_2$ les autres solutions

3) Le plan complexe est muni d'un R. O. N $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ; $z_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et $z_C = -1$.

a) Donner la forme exponentielle de $z_A$ et de $z_B$ .

b) Placer avec précision les points A , B et C dans le repère.

4) Soit D le symétrique du point A par rapport à l'axe des réels.

a) Déterminer l'affixe $z_D$ du point D sous forme algébrique.

**Exercice 6:**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la transformation du plan $f$ qui a tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ définie par : $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble des points invariant par $f$.
2. Déterminer l'image par $f$ des points $A\,(1 + 2i)$ et $B(-1\,,2)$.
3. Déterminer l'antécédent par $f$ du point $C(1 + 2i)$
4. Déterminer l'image par $f$ de la droite $(D) : y = 2x + 1$
5. Déterminer l'écriture complexe de $f$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f$.